

## 針對學習難點的教學設計—— 解一元一次方程

程翠娟

香港教育局

葉詠欣

明愛屯門馬登基金中學

### 引言

學生在小學五年級開始學習解一步計算的方程，在六年級則學習解兩步的，用的方法都是稱為「天秤原理」的等量公理。選擇「天秤原理」是因為它具體，容易理解，適合小學生。升上中學後，由於方程較之前的複雜，在方程左右兩邊同時加上、減去、乘以或除以一個數的方法，似乎不夠便捷。於是大多數的教師都會開始教授移項，然學生卻常出錯，例如：移項時弄錯正負號，及未拆括號就把括號內的某項減去括號外的另一項等。我們知道解方程是學習數學一個很基本的能力，如果掌握得不好，影響深遠。不少老師都曾嘗試自行把教科書的題目編排一下，目的使學生能夠針對某類型的題目多做練習，希望他們能從熟練中掌握應有的技巧，奈何能力稍遜的學生還是對解方程的步驟一知半解。

本文旨在分享我們於去年與明愛屯門馬登基金中學對解一元一次方程所做的教學研究的內容及成果。

### 前測與學習難點

查看歷年全港性系統評估(Territory-wide System Assessment, TSA)的一些相關題目的學生表現，發現解一元一次方程的全港答對率都是徘徊在七成左右，例如 2011 年的 9MC1 第 28 題（圖一）的答對率為 74.4%，如當中涉及分數，其表現則會急跌一成，如同年的 9MC4 第 30 題（圖二）的答對率為 44.6%。由此可知，學生在解含分數的一元一次方程倍感困難。

解方程 $7 - 4x = 2x - 11$ 。	解方程 $3 - \frac{x}{2} = x$ 。
--------------------------	-----------------------------

圖 一

圖 二

爲了進一步了解學生在這課題的學習難點，我們共同設計了一份簡單的診斷課業（下稱前測）給該校的中二級學生做。由於合作學校的學生多為非受本地教育的非華語學童，學生的教育背景及水平有著嚴重的差異，而且對學習數學欠缺信心和興趣。因此，前測的內容偏向較簡易的一元一次方程，題目（圖三）及其答對率（圖四）如下：

1. $x + 1 = 3$	2. $2x - 4 = 0$
3. $3x = 15$	4. $-x = 1$
5. $3x + 11 = 23$	6. $5 - 2x = 9$
7. $5x - 3 = 2x + 3$	8. $2(3 - 2x) = 4$
9. $\frac{x}{3} - 2 = 1$	

圖 三

	題 1	題 2	題 3	題 4	題 5	題 6	題 7	題 8	題 9
前測答對率 (中二級學生)	<b>84.6%</b>	<b>60.0%</b>	<b>66.7%</b>	<b>23.1%</b>	<b>64.1%</b>	<b>18.0%</b>	<b>33.3%</b>	<b>23.1%</b>	<b>30.8%</b>

圖 四

我們把學生的正確答案和錯誤答案分開細閱，想從中多一點了解學生的想法。由於題目較簡易，我們發現有不少學生會直接寫答案（圖五）或在方程上代入某數字試驗答案（圖六）。

2. $2x - 4 = 0$ $x = 2 //$ ✓	5. $3x + 11 = 23$ $x = 4 //$ ✓	7. $5x - 3 = 2x + 3$ $x = 3 //$ ✓
---------------------------------	-----------------------------------	--------------------------------------

圖 五

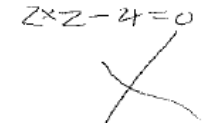
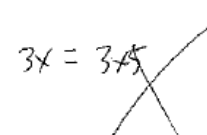
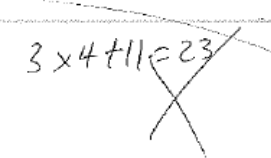
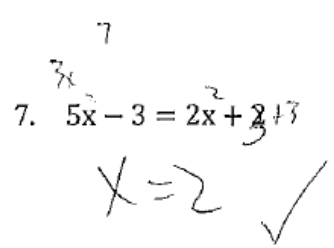
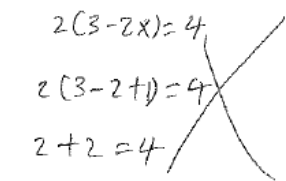
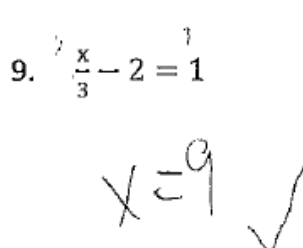
2. $2x - 4 = 0$ $2 \times 2 - 4 = 0$ 	3. $3x = 15$ $3x = 3 \times 5$ 	5. $3x + 11 = 23$ <del><math>3 \times 4 + 11 = 23</math></del> 
7. $5x - 3 = 2x + 3$ $x = 2$ ✓ 	8. $2(3 - 2x) = 4$ $2(3 - 2x) = 4$ $2(3 - 2) = 4$ $2 + 2 = 4$ 	9. $\frac{x}{3} - 2 = 1$ $x = 9$ ✓ 

圖 六

學生除了使用移項解方程外，有部分學生也習慣使用「天秤原理」。可惜，學生解方程的過程中發生不少錯誤（圖七），例如圖七(b)的學生可能以為負號是跟前面的數字「5」及圖七(g)中的學生把-4移項到右方時並沒有轉成+4。

6. $5 - 2x = 9$ $5 - 5 + 2x = 9 + 5$ $2x = 14$ $\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$ $x = 7$ (a)	6. $5 - 2x = 9$ $5 - 2x + 5 = 9 + 5$ $2x = 14$ $\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$ $x = 7$ (b)	6. $5 - 2x = 9$ $5 - 2x = 9$ $+2x = 9 + 5$ $2x = 14$ $x = 7$ (c)
6. $5 - 2x = 9$ $2x = 9 + 5$ $2x = \frac{14}{2}$ $x = 7$ (e)	7. $5x - 3 = 2x + 3$ $2x + 5x = 3 - 3$ $7x = 0$ $x = \frac{0}{7}$ $x = 0$ (f)	$2x - 4 = 0$ $2x = -4$ $x = -2$ (g)

圖 七

總結分析的結果，我們發現學生有以下的學習難點：

1. 學生消去  $x$  項的係數時發生錯誤，例如從  $-x = 3$  得出  $x = +3$ ；
2. 學生移項時弄錯正負號；
3. 學生錯誤地把一些算術法則運用於代數符號，例如：
4.  $5\frac{3}{4} - 2\frac{3}{4} = 3 \Rightarrow 5x - 2x = 3$ ;
5.  $3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x - 3 = x$  等
6. 學生把不同類項當作同類項運算，例如： $5 - 2x = 3x$  等；
7. 學生拆括號時發生錯誤，例如未能正確使用分配律或弄錯了正負號；
8. 學生將方程兩邊倍大時發生錯誤，例如未能正確使用分配律或弄錯了正負號。

## 課業設計

學生在小學學習的方程只涉及兩步計算的，但到了中學所要解的方程卻又可以很複雜，中間有很大的差別。過程中，學生需要慢慢習慣，故此在教授此課題時，不宜急進，需讓他們打好基礎。基於上述的學習難點，我們認為對於能力稍遜的學生，以「天秤原理」解方程有助減少學生不正確移項的錯誤。我們更嘗試利用「直式」引導學生把同類項對齊加減，訓練學生正確地合併同類項，減低如  $5 - 2x = 3x$  的錯誤。由於一般學生的分數運算的基礎較弱，故透過直式倍大兩邊以消去分母，把涉及分數的方程變作只涉及整數的方程，減低學生面對分數時候的恐懼感，並且利用學生在小學已經十分熟悉的乘法直式作隱喻 (metaphor)，提醒他們要用分配律，減低他們出錯的機會。此外，課業的設計是按解方程的過程細分成五個步驟，合共七張工作紙，每張工作紙所建立的能力都是緊扣之前的一張，目的是透過程序操作幫助學生建立解方程的概念和步驟。

工作紙一：消去係數

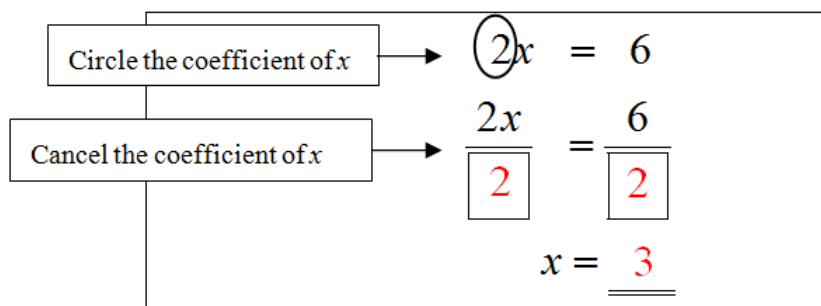


圖 八

工作紙(一)的題目雖然很淺易，但很重要！目的是透過消去包括分數和負數的  $x$  項係數的練習，讓學生認識係數的意義（圖八）。在前測中，題 4 的答對率僅有 23.1%，是較低答對率的其中一題。有學生錯誤以為  $x$  的負號移項到右方就變成  $+1$ ，左方剩下  $x$ ，故此答案為 2（圖九(a)）；甚至有一位學生認為此題為無解（圖九(f)），然此學生在其餘的八題都是全對的！可見學生對  $-x$  的意義並不大清楚。老師可以在此讓學生明白  $-x$  即是  $-1x$ ，故其係數為  $-1$ 。

<p>4. <math>-x = 1</math></p> <p><math>x = 1 + 1</math></p> <p><math>x = 2</math></p>	<p>4. <math>-x = 1</math></p> <p><math>-x + 1 = 1 + 1</math></p> <p><math>x = 2</math></p>	<p>4. <math>-x = 1</math></p> <p><math>-x + 1 = 1 + 1</math></p> <p><math>x = 2</math></p>
(a)	(b)	(c)
<p>4. <math>-x = 1</math></p> <p><math>-x = 1</math></p> <p><math>+x = 1 + 1</math></p> <p><math>x = 2</math></p>	<p>4. <math>-x = 1</math></p> <p><math>-x + 1 = 1</math></p>	<p>4. <math>-x = 1</math></p> <p><math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\nexists</math></p> <p>No answer.</p>
(d)	(e)	(f)

圖 九

工作紙二：以直式消去左邊常數項

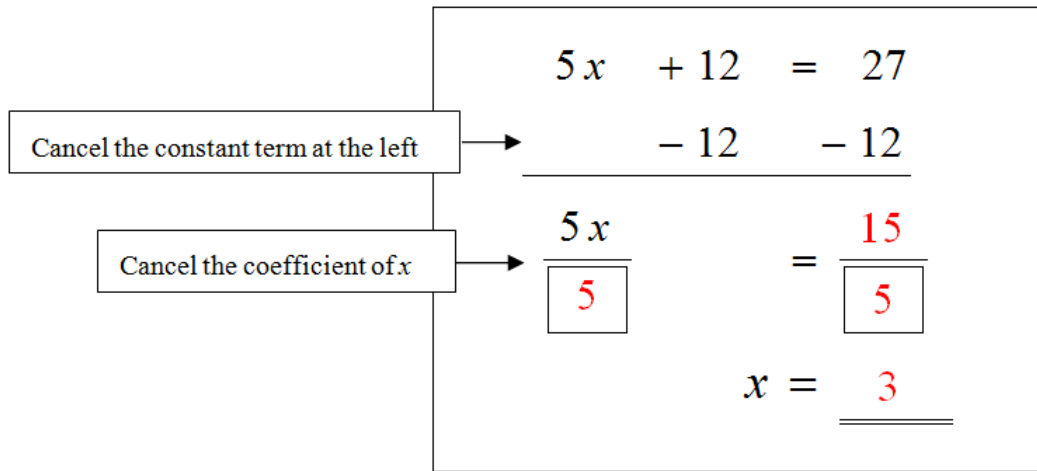


圖 十

由於學生在處理移項的過程中常發生錯誤，故此在工作紙二開始引入「直式」，教導學生先把左方的常數項消去（圖十）。從課堂的觀察及後測（一）的表現（圖十一），「直式」的有效防止學生胡亂地把不同類項相加減，減低學生在移項時把正負號弄錯的機會，即使是  $x$  項含負號的方程。

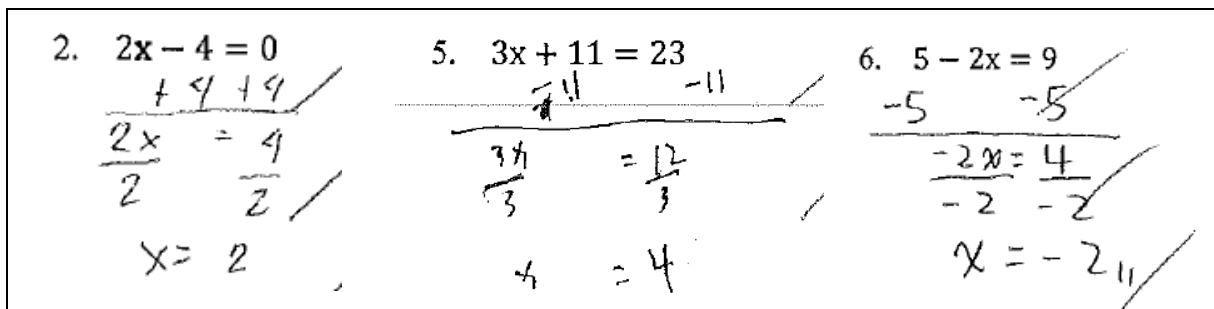


圖 十 一

工作紙三：以直式消去左邊常數項及右邊  $x$  項

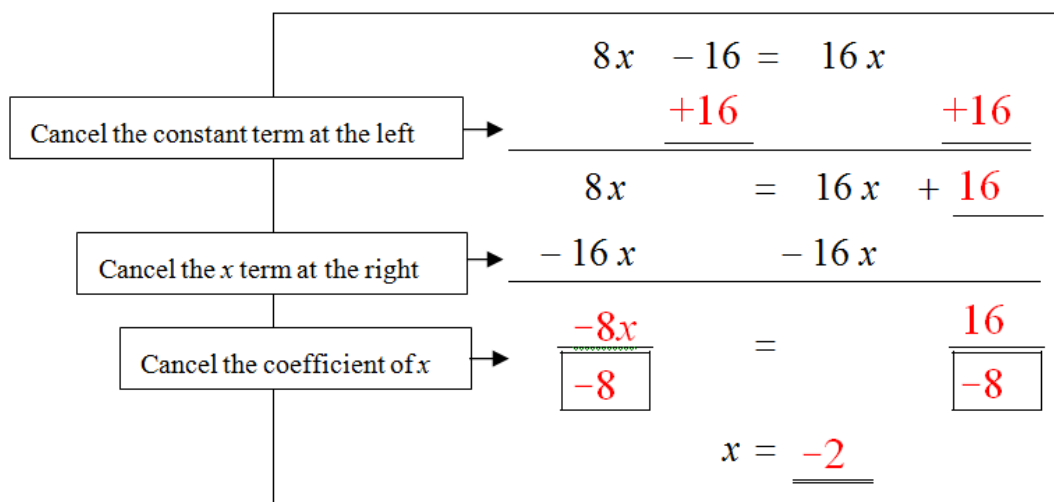


圖 十 二

工作紙三的目的是教導學生如何處理項數較多的方程（圖十二）。首先着學生盡量使得左邊只剩下  $x$  項，故此先把左邊的常數項消去（即移項至右邊）；下一步就是把  $x$  項合併起來，故此把右邊的  $x$  項消去（即移項至左邊）。教師在過程中並不需要提及移項，避免學生混淆，只讓學生明白在方程的兩邊同時加上或減去一個項，並不影響方程的平衡關係，並使左邊剩下  $x$  項，右邊則剩下常數項，方程則能解出。圖十三為學生在後測（一）的表現：

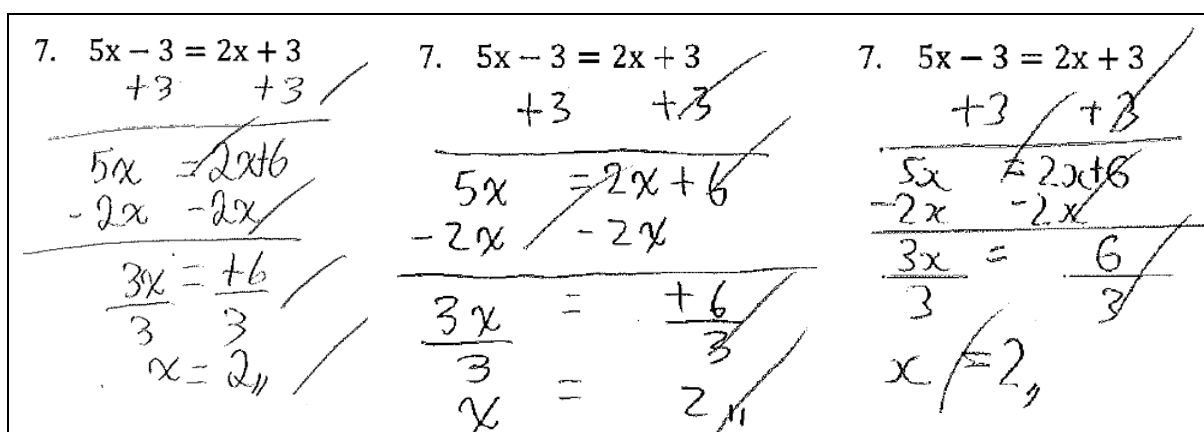


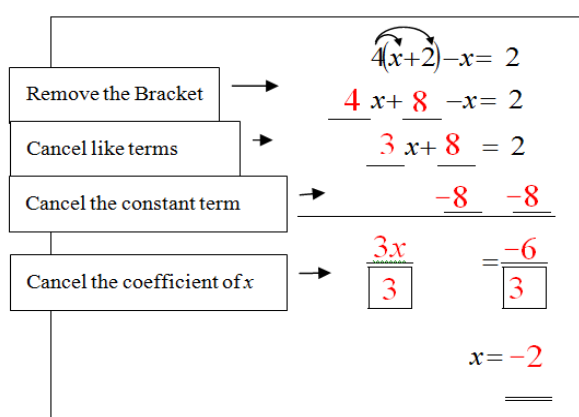
圖 十 三

工作紙四及五：拆括號（一）及（二）

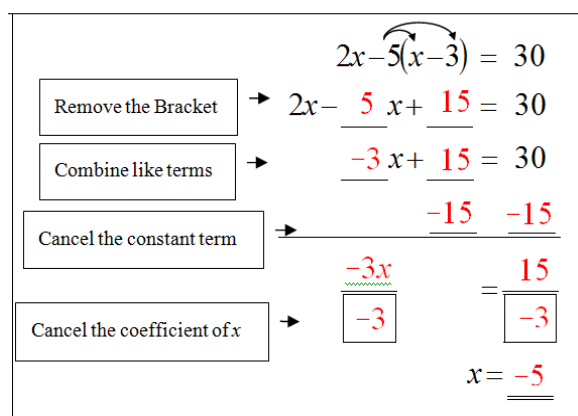
<p>8. <math>2(3 - 2x) = 4</math></p> <p><del><math>2(3 - 2x) = 4</math></del>  <del><math>3 - 2x + 3 = 4 + 3</math></del>  <del><math>2 \times 2x = 7</math></del>  <del><math>4x = 7</math></del></p>	<p>8. <math>2(3 - 2x) = 4</math></p> <p><del><math>2(3 - 2x) = 4</math></del>  <del><math>2(3 - 2) = 4</math></del>  <del><math>2 + 2 = 4</math></del></p>	<p>8. <math>2(3 - 2x) = 4</math></p> <p><del><math>2(3 - 2x) - 2 = 4 - 2</math></del>  <del><math>3 - 2x = 2</math></del>  <del><math>3 - 2x + x - 2 = 2x + 2 - 2</math></del>  <del><math>1 = 2x</math></del></p>
(a)	(b)	(c)
<p>8. <math>2(3 - 2x) = 4</math></p> <p><del><math>(3 - 2x) = 4 + 2</math></del>  <del><math>2x = 6 - 3</math></del>  <del><math>2x = 3</math></del>  <del><math>x = \frac{3}{2}</math></del>  <del><math>x = 1.5</math></del></p>	<p>8. <math>2(3 - 2x) = 4</math></p> <p><del><math>3 - 2x = 4</math></del>  <del><math>3x =</math></del>  <del><math>(3 - 0x) = 4</math></del>  <del><math>-3x = 4</math></del>  <del><math>= 4 - 3x</math></del>  <del><math>x = -1/1</math></del></p>	<p>8. <math>2(3 - 2x) = 4</math></p> <p><del><math>2(3 - 2x + 3) = 4 + 3</math></del>  <del><math>2(2x) = 7</math></del>  <del><math>\frac{2(2x)}{2} = \frac{7}{2}</math></del>  <del><math>x = \frac{7}{2}</math></del></p>
(d)	(e)	(f)

圖十四

圖十四為學生在前測有關拆括號的表現。當中顯示他們對分配律的認識不足，於是在拆括號的時候就發生不同的錯誤，如圖十四（c）及（d），學生誤以為括號外的乘數 2 可以隨意與其它項相減。工作紙四的目的是讓學生先掌握較為簡單的拆括號方法，將含括號的方程變為前一張工作紙的沒有括號方程。學生在拆係數為負數的括號時（圖十六），會較容易發生錯誤，故此在工作紙五加入足夠數量的練習，加強學生在此方面的技巧及理解。



圖十五



圖十六



工作紙六：消去分母（一）

<p>e.g.1</p> $\frac{x}{2} + 5 = 10$ $\times 2 \quad \times 2$ <hr/> $x + 10 = 20$ $- 10 \quad - 10$ <hr/> $x = \underline{\underline{-10}}$	<p>e.g.2</p> $\frac{x}{3} - 1 = 5$ $\times 3 \quad \times 3$ <hr/> $x - 3 = 15$ $+ 3 \quad + 3$ <hr/> $x = \underline{\underline{18}}$
---	--

圖 十 七

含分數的方程是學生感到最困難的，故此工作紙六（圖十七）是教導學生第一時間把方程兩邊倍大，消去分母，令涉及分數的方程變為只涉及整數的方程，減低他們處理分數的恐懼感。可是，學生在倍大的過程，往往會有漏乘某項或正負號出現錯誤的情況（圖十八）。為了避免以上錯誤，我們利用小學生熟悉的乘法直式作隱喻（metaphor），提醒他們要正確地運用分配律，把每一項倍大，減少他們出錯的機會。

<p>9. <math>\frac{x}{3} - 2 = 1</math></p> $\frac{x}{3} - 2 \times 3 = 1 \times 3$ $x - 2 = 3$	<p>9. <math>\frac{x}{3} - 2 = 1</math></p> $\frac{x}{3} = (-2) \checkmark$ $\frac{x}{3} = -1$ $x = 3 - 1$ $x = 2 \checkmark$	<p>9. <math>\frac{x}{3} - 2 = 1</math></p> $x - 2 = 3$ $x = 5$
--	--	--

圖 十 八

## 工作紙七：消去分母（二）

	$\frac{4x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = 5$
Put numerators in brackets →	$\frac{(4x+1)}{3} - \frac{(x-1)}{2} = 5$
Multiply both sides by LCM of denominators →	$\frac{(4x+1)}{3} - \frac{(x-1)}{2} = 5$ $\quad \quad \quad \times 6 \quad \times 6$
Cancel denominators →	$\underline{2} (4x+1) - \underline{3} (x-1) = \underline{30}$
Remove brackets →	$\underline{8} x + \underline{2} - \underline{3} x + \underline{3} = \underline{30}$
Combine like terms →	$\underline{5} x + \underline{5} = \underline{30}$
Cancel the constant term at the left →	$\quad \quad \quad \underline{-5} \quad \underline{-5}$
Cancel the coefficient of x →	$\frac{\underline{5}x}{\underline{5}} = \frac{\underline{25}}{\underline{5}}$
	$x = \underline{\underline{5}}$

圖 十 九

工作紙七方程中的分子會出現兩項，是整套工作紙中最複雜的，一般的學生都會對方程的結構覺得難以理解，在解方程的時候更容易在正負號的運算及乘法分配律的運用上出錯。工作紙的策略是教導學生當分子多於一項時把它「打包」，即是適當地加括號，然後再透過兩邊倍大消去分母，把它化為只有整數及括號的方程，然後再以之前所學方法解方程。

## 後測(一)及(二)

我們在中一級試用以上工作紙進行教學。在教學完成後，我們在較長的時間後才安排一個和前測題目一樣的后測（後測一），藉此觀察學生是否能內化所學的解方程知識。下表為前測與後測（一）答對率的比較：

	題 1	題 2	題 3	題 4	題 5	題 6	題 7	題 8	題 9
前測答對率 (中二級學生)	84.6%	59.0%	66.7%	23.1%	64.1%	18.0%	33.3%	23.1%	30.8%
後測(一)答對率 (中一級學生)	88.9%	83.3%	61.1%	55.6%	88.9%	66.7%	66.7%	55.6%	55.6%
比較前測與後測(一)	↑4.3%	↑24.4%	↓5.6%	↑32.5%	↑24.8%	↑48.7%	↑33.3%	↑32.5%	↑24.8%

圖 二 十

從上表可見，較淺的題目，升幅較少，如題 1 及 3；較深的題目的升幅則非常顯著，其中題 6 的上升幅度最大，有 48.7%。從觀察學生的表現，我們發現學生由於沒有使用移項來解方程，故此其解方程出現錯誤的花樣也較少，且單一；而對於只有同類項才能相加減的法則的概念也明顯加深。圖二十一至是其中一位學生在後測的表現，可見等量公理和「直式」對學生解方程有幫助。

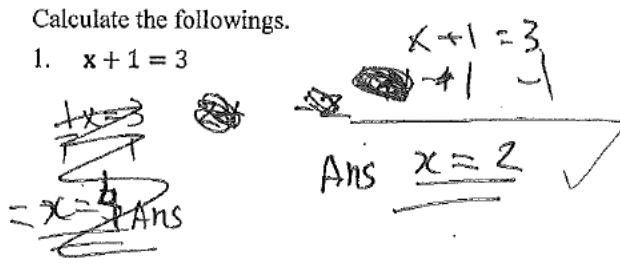
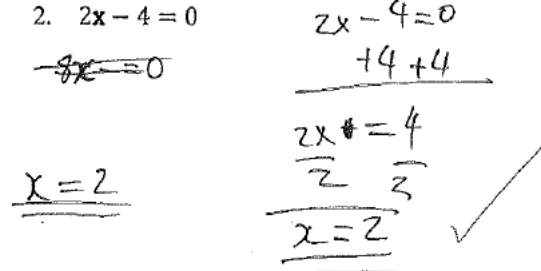
<p>Calculate the followings.</p> <p>1. <math>x + 1 = 3</math></p> 	<p>2. <math>2x - 4 = 0</math></p> 
---	--

圖 二 十 一

圖 二 十 二

除此之外，筆者另外設計題目較深的後測（二）（圖二十三），目的是想知道課業的設計能否有助學生解決一些較深的題目，如下：

1. $5(x - 2) = 30$	2. $5(x - 2) - 3x = 30$
3. $\frac{3}{10}x - 1 = 5$	4. $\frac{3}{10}(4x + 5) - 1 = 5$
5. $\frac{x}{3} + 4 = 10$	6. $\frac{5x - 7}{3} + 4 = 10$

圖 二 十 三

下表為後測(二)的答對率：

	題 1	題 2	題 3	題 4	題 5	題 6
後測（二）答對率 （中一級學生）	<b>70.6%</b>	<b>64.7%</b>	<b>52.9%</b>	<b>35.3%</b>	<b>52.9%</b>	<b>41.2%</b>

圖 二 十 四

由於學生的能力稍遜，學校以往都不會教授如題 3-6 的方程，老師在開始時都曾猶豫過，及至教學過程中看到學生們逐步掌握後，老師才有信心把學生的解方程能力提升至含分數部分。由此可見，課業的設計能有效幫助能力較弱的學生逐步建構解方程的概念和能力。

## 反思

從後測（一）的觀察，我們發現學生的錯誤花樣雖然明顯少了，但仍  
有不足之處（圖二十五）。故此，教師教導的時候仍需特別注意，對於較淺  
易的概念，如工作紙一和二，不要掉以輕心，因為它們是解方程的基石。  
此外，老師也需要特別講解消去係數與消去項的意義有何不同。

6.  $5 - 2x = 9$

$$5 - 2x = 9$$

$$-2x = 9 \quad \checkmark$$


---


$$\frac{-2x}{+2} = \frac{9}{+2} \quad x = 2 \quad \times$$

$$5x - 3 = 2x + 3$$

圖 二 十 五

## 結語

對學習數學沒有多大興趣和信心的學生來說，在教導數學的概念之  
外，建立他們在數學的成功感與減低他們的恐懼感尤其重要。在是次的教  
學設計中，我們很高興見到學生對學習數學的信心大了。這點很重要，學  
生覺得自己做到就自然有信心，有了信心就願意做，願意做就事半功倍。  
或許有人會認為以等量公理及「直式」解方程步驟較多，寫的字較多，影  
響運算速度。然從課堂的觀察，對於能力稍遜的學生來說，這樣程序式的  
訓練反而能有效地植入解方程的法則和相關代數概念，對他們的學習有顯  
著的幫助。而對於能力較高的學生，明白了等量公理後，亦能自行以移項  
的方式解方程，並且加強了他們對移項的理解。在後測的面談中，有一位  
男學生在小學時已經學會移項，但當做到較深的題目就立即轉用「直式」  
的方法，問起因由，他說因為它比較可靠！

我們亦發覺很多同學在其他課題中，若遇到需要解方程的題目，都會  
主動運用這個方法（圖二十六、二十七）。由此可見他們很多人已經內化了  
這套方法，亦證明了這套方法能有效幫助他們。

Find the unknowns in the figure.

$$\begin{array}{r} x + 130^\circ = 180^\circ \text{ (adj. } \angle\text{s on a str. line)} \\ \underline{-130^\circ \quad -130^\circ} \\ x = 50^\circ \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y = 65^\circ \text{ (vert. } \angle\text{s opp } \angle\text{s)} \\ \underline{x + y + z = 180^\circ \text{ (} \angle\text{s sum of } \Delta\text{)}} \\ 50 + 65 + z = 180^\circ \\ \underline{115 + z = 180^\circ} \\ \underline{-115 \quad -115} \\ z = 65^\circ \checkmark \end{array}$$

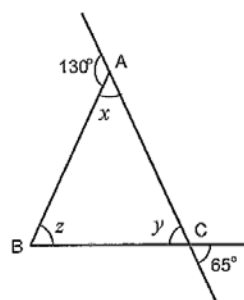


圖 二 十 六

Given that  $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ , find the unknown  $a$ .

$$\begin{array}{r} 22 + 125 + \angle B = 180^\circ \text{ (} \angle\text{s sum of } \Delta\text{)} \\ \underline{147 + \angle B = 180^\circ} \\ \underline{-147 \quad -147} \\ \angle B = 33^\circ \\ \underline{a = 33^\circ \checkmark} \end{array}$$

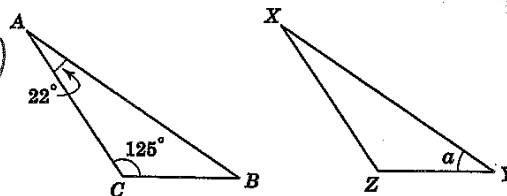


圖 二 十 七

這套工作紙的中英文版可於教育局的「網上學與教支援」網頁 (<http://wlts.edb.hkedcity.net>) 下載。

作者電郵：程翠娟 cherieching@edb.gov.hk  
葉詠欣 maggiyan\_work@yahoo.com.hk