

針對學習難點的教學設計 – 分數乘法

柯志明

香港教育局教育基建分部

為甚麼 3 升水的 $\frac{3}{4}$ 等於 $3 \times \frac{3}{4}$ 升水？

一天，一位剛學完了分數乘法，正在練習以分數乘法解應用題的學生，突然向老師提出一條問題：「為甚麼 3 升水的 $\frac{3}{4}$ 等於 $3 \times \frac{3}{4}$ 升水？」，這位學生其實完全懂得如何計算 $3 \times \frac{3}{4}$ ，只是在做應用題的時候才忽然發覺自己原來不明白為何 3 升水的 $\frac{3}{4}$ 等於 $3 \times \frac{3}{4}$ 升水。

這位學生的問題讓筆者反思學生除了知道兩個分數相乘時要「分子乘分子、分母乘分母」這條公式外，對分數乘法的概念是否有真正的理解？學生是否能夠運用分數乘法解答應用題？筆者於是從全港性系統評估（Territory-wide System Assessment, TSA）的一些相關題目及數據中入手，嘗試了解一下學生對分數乘法概念的掌握情況。例如 2008 年的 6MC2 第 16 題及 6MC3 的第 17 題（圖一）：

一包果仁重 $1\frac{1}{3}$ 公斤， $5\frac{1}{2}$ 包果仁共重 _____ 公斤。

圖 一

這一題的全港答對率為 64.6%，即全港只有少於三分之二的學生能答對這樣的一條基本題目！這個答對率實在不能令人滿意。筆者發現有部份學生以「 $6\frac{5}{6}$ 」作答，相信這些學生是從算式「 $1\frac{1}{3} + 5\frac{1}{2}$ 」得出這個答案。換句話說，這些學生並不理解 $5\frac{1}{2}$ 是 $1\frac{1}{3}$ 的倍數，只把它當作一個數量加上 $1\frac{1}{3}$ 。類似的情況亦出現於同年的 6MC4 第 12 題（圖二）：

小明每星期的零用錢是 128 元，他用去零用錢的 $\frac{4}{5}$ ，把餘下的儲蓄起來，他每星期儲蓄多少元？（列式計算）

圖 二

TSA 的報告指出全港只有 62.3% 的學生能夠列出正確的算式，而能夠得出正確答案的學生更只有 56.6%。部分未能正確作答學生的算式如下（圖三）：

他每星期儲蓄：

$$\begin{aligned} & 128 - \frac{4}{5} \\ = & 127\frac{5}{5} - \frac{4}{5} \\ = & 127\frac{1}{5} \text{ (元)} \end{aligned}$$

圖 三

同樣地，這些學生未能將 $\frac{4}{5}$ 理解為 128 元的倍數，只把它當作一個數量從 128 中減去。

從以上例子中我們看到部份學生在解應用題時未能利用分數乘法找出整體中的部份的數值，而更根本的原因，可能他們根本未能建立一個數的分數倍的概念。針對這些學習難點，我們設計了一套課業，透過一個簡單的情境，再配合適當的圖像，幫助學生建立分數倍數的概念，並得出「分子乘分子、分母乘分母」這條計算分數乘法的公式。

為使課堂討論更加互動，我們利用免費的 Java-based 軟件 GeoGebra 製作動態課業供老師於課堂使用，電腦只需安裝了 Java 即可執行。這套課業的工作紙及動態圖形檔可在教育局的「網上學與教支援」網頁 <http://wlts.edb.hkedcity.net> 裡「熱門推介」中的「分數乘法（小五數學）」下載。


課業一：分數乘以整數

學生在低年級學習整數乘法時，是以「連加」的觀念理解乘法的。同一道理，當我們將乘法概念由整數推廣至分數時，我們亦需要先幫助學生以連加的觀念理解「分數乘以整數」。我們選擇以情境「已知每包米重多少公斤，求若干包米的重量」和學生建立分數乘法的概念，因為這個情境既簡單易明，亦可輕易地將數量（米的重量和包數）由整數擴展至分數。為令學生專注於概念的理解，我們將集中地以這個情境及其圖像和學生作討論。

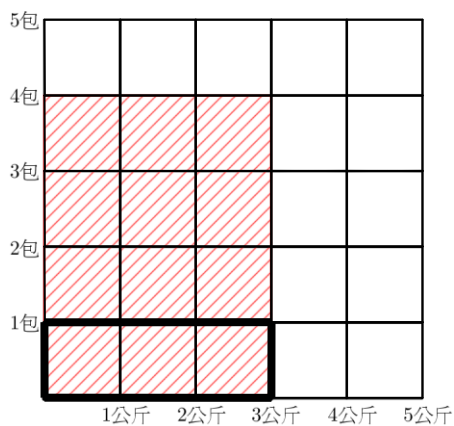
課業的關鍵構思是透過圖像，把一個數量（一包米的重量）和它的倍數（米的包數）的概念視像化（visualize）。我們設計了一幅二維的圖像，以橫向表示米的重量，而縱向即表示米的包數，像堆疊米包般，把一包米重量（以黑色粗框表示）的若干倍的概念具體地呈現出來。我們先以下面兩條簡單問題和學生重溫整數的乘法：

1 包米重 3 公斤，4 包米重多少公斤？

1 包米重 4 公斤，3 包米重多少公斤？

我們在工作紙每一題都會附上一幅圖，這圖的橫向顯示由 1 公斤至 5 公斤的重量，縱向顯示由 1 包至 5 包的包數，而粗框即顯示 1 包米的重量。接著我們要求學生如圖四般，按所示的重量和包數以斜線（）顯示所求重量，並寫出對應的算式。

1 包米重 3 公斤，4 包米重多少公斤？



1 包米重 4 公斤，3 包米重多少公斤？

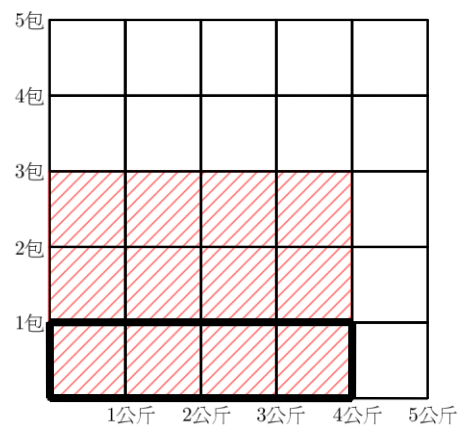


圖 四

當學生熟習了如何在圖中以斜線顯示所求重量後，我們就可以利用這圖像和他們討論分數乘法了。我們先處理「分數乘以整數」的情況。以「1包米重 $\frac{2}{3}$ 公斤，4包米重多少公斤？」為例，學生首先在工作紙的圖中畫出重量所佔的範圍，然後老師提問學生：

「從圖中所見，斜綫部份包含了多少等份？」（8 等份）

「為甚麼？」（因為每包米包含了 2 等份，所以 4 包米包含了 $2 \times 4 = 8$ 等份）

「那麼，斜綫部份所表示的重量是否 8 公斤？為甚麼？」（不是，因為每等份的重量不是 1 公斤，而是 $\frac{1}{3}$ 公斤）

「斜綫部份所表示的重量是多少？」（ $\frac{2 \times 4}{3}$ 公斤）

透過圖像和提問，學生就知道 $\frac{2}{3} \times 4$ 應為 $\frac{2 \times 4}{3}$ 了。老師可開啟 Java 檔案 fraction_x.html（圖五），然後逐步向上拖拉紅色滑桿上的點，讓學生透過動態圖像加深對 $\frac{2}{3} \times 4$ 等於 4 個 $\frac{2}{3}$ 連加的理解，並勾選顯示框逐步顯示相關的運算步驟。

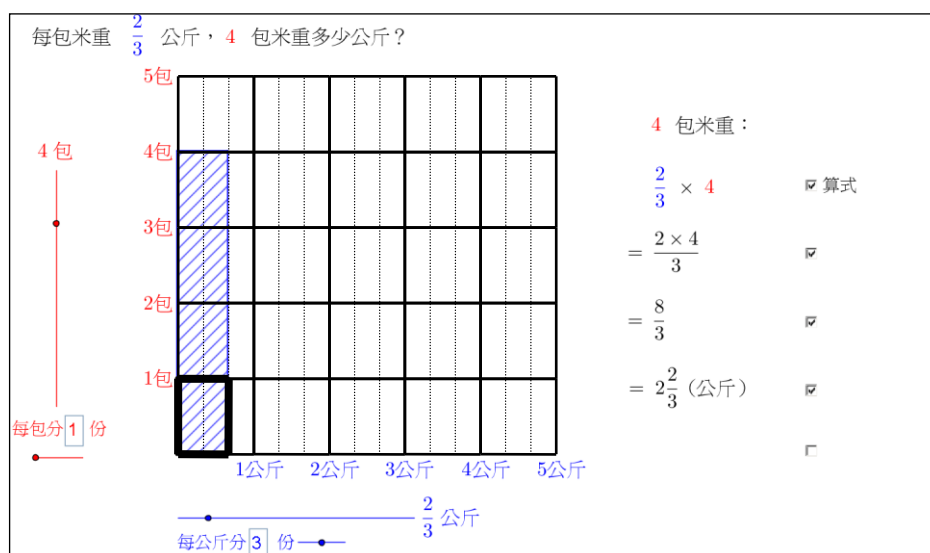


圖 五

接著我們和學生討論當被乘數是帶分數時的情況。以「1包米重 $3\frac{2}{5}$ 公斤，

3 包米重多少公斤？」為例，和之前一樣，學生首先在圖中以斜綫畫出重量所佔的範圍，然後老師向學生作出下列提問：

「從圖中所見，斜綫部份包含了多少等份？」（51 等份）

「為甚麼？」（因為每包米重 $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ 公斤，即每包米包含了 17 等份，

所以 3 包米包含了 $17 \times 3 = 51$ 等份）

「那麼，斜綫部份所表示的重量是否 51 公斤？為甚麼？」（不是，因為每等份的重量不是 1 公斤，而是 $\frac{1}{5}$ 公斤）

「如何計算斜綫部份所表示的重量」（ $\frac{17 \times 3}{5}$ 公斤）

透過以上提問，加上圖像的配合，學生就能明白為何要先將帶分數化作假分數，再將整數乘數和假分數的分子相乘就能得出答案（圖六）。

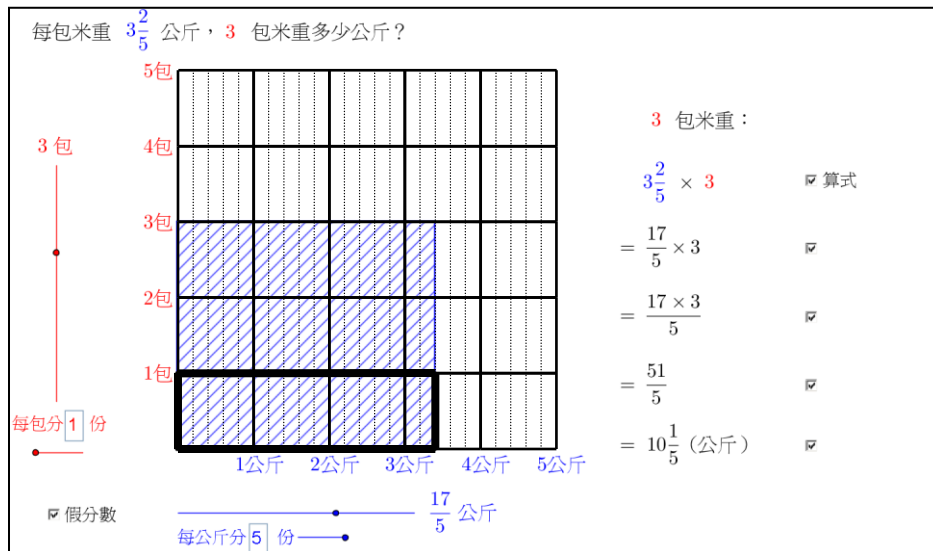


圖 六

課業二：整數乘以分數

坊間一般的教科書在以「連加」的方式處理「分數乘以整數」後，就會把「整數乘以分數」這個情況當作「分數乘以整數」般輕輕帶過，例如 $3 \times \frac{3}{4}$ 就等於 $\frac{3 \times 3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ 。可是「分數乘以整數」和「整數乘以分數」在概念上是截然不同的。對初學分數乘法的學生來說，他們對乘法就只有「連加」這個概念。所以他們對「 $\frac{3}{4} \times 3$ 」的理解就是 $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ 、或 $\frac{3}{4}$ 的

3 倍。可是「3 的 $\frac{3}{4}$ 倍」是甚麼意思呢？為甚麼 3 的 $\frac{3}{4}$ 倍等於「 $3 \times \frac{3}{4}$ 」呢？若我們沒有相應的教學活動幫助學生建立一個數的分數倍的概念，他們就未必能夠真正理解分數乘法的意義，也未必懂得以分數乘法解相關的應用題。

這個課業的學習重點，就是透過圖像，把一包重量為整數的米的分數包數呈現出來，讓學生建立一個整數的分數倍的概念，及對其相關乘法算式的理解。我們在工作紙中先提出以下問題：

1 包米重 3 公斤， $\frac{1}{4}$ 包米重多少公斤？

和之前的課業一樣，我們要求學生以斜綫在圖中畫出所求重量的範圍（圖七）。我們之前以鉛垂虛綫表示分數重量，這一次我們以水平虛綫表示分數包數。透過水平虛綫把 3 公斤的重量分為 4 等份，學生就清楚地從圖像看到 3 公斤的 $\frac{1}{4}$ 包含了 3 個等份，而每等份為 $\frac{1}{4}$ 公斤，所以

「3 公斤的 $\frac{1}{4}$ 」就應等於 $3 \times \frac{1}{4}$ 公斤 = $\frac{3}{4}$ 公斤。

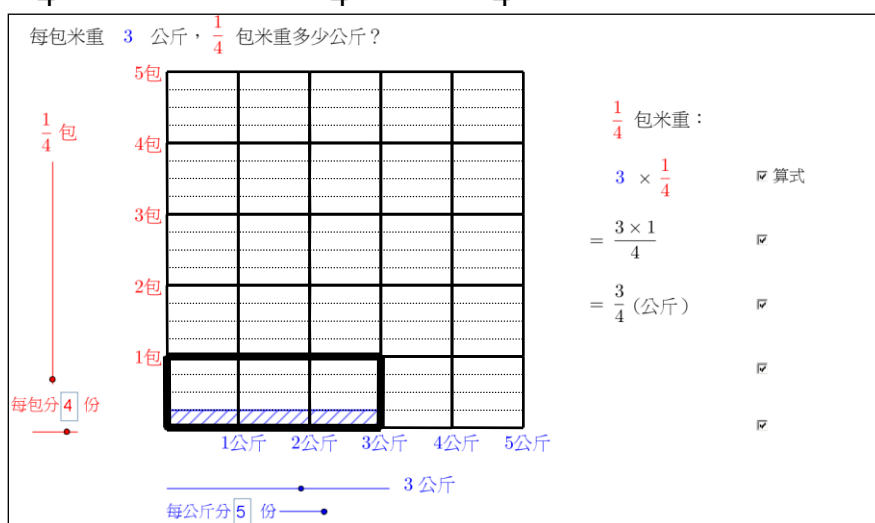


圖 七

為了讓學生更加理解「整數的分數倍」和「分數的整數倍」兩個概念之間的異同，我們接著和學生討論：「1 包米重 $\frac{1}{4}$ 公斤，3 包米重多少公斤？」

（圖八）透過比較圖八和圖七的圖像及算式，學生就能認識為何「3 公斤的 $\frac{1}{4}$ 倍」和「 $\frac{1}{4}$ 公斤的 3 倍」這兩個不同的概念有著相同的答案，也更能明白乘法的交換律（即 $a \times b = b \times a$ ）的意義。

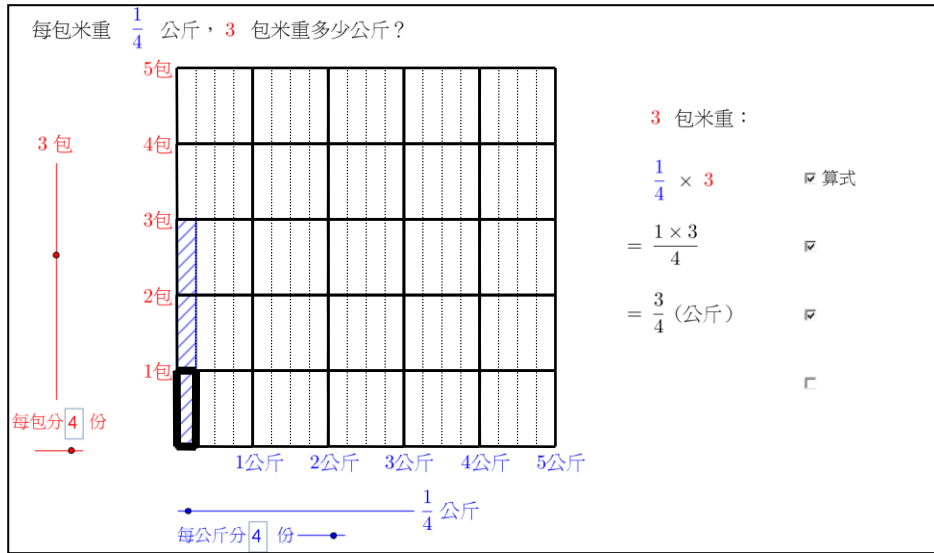


圖 八

最後，我們以圖九的問題加強對上述概念的理解，並以如圖十般的問題處理當乘數為帶分數時的情況，過程和之前的課業類似，此處不贅。

1 包米重 5 公斤， $\frac{2}{3}$ 包米重多少公斤？ 1 包米重 $\frac{2}{3}$ 公斤，5 包米重多少公斤？

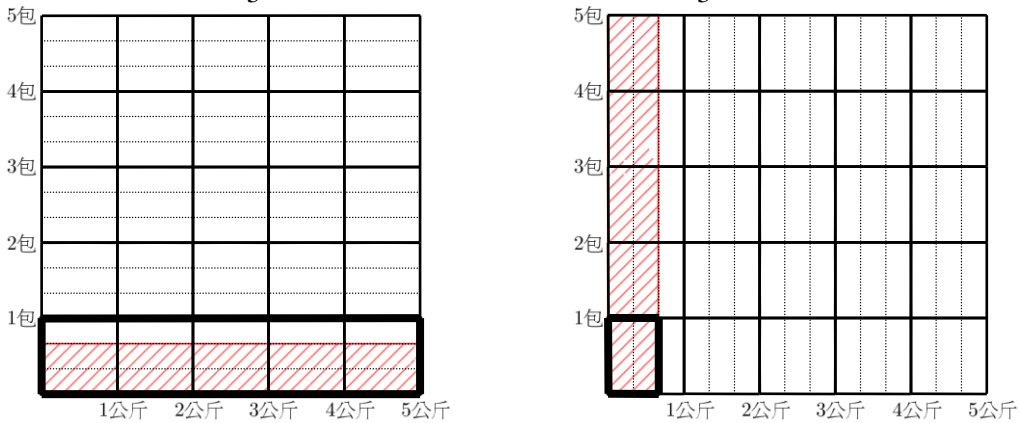


圖 九

1 包米重 3 公斤， $4\frac{2}{3}$ 包米重多少公斤？ 1 包米重 4 公斤， $3\frac{3}{5}$ 包米重多少公斤？

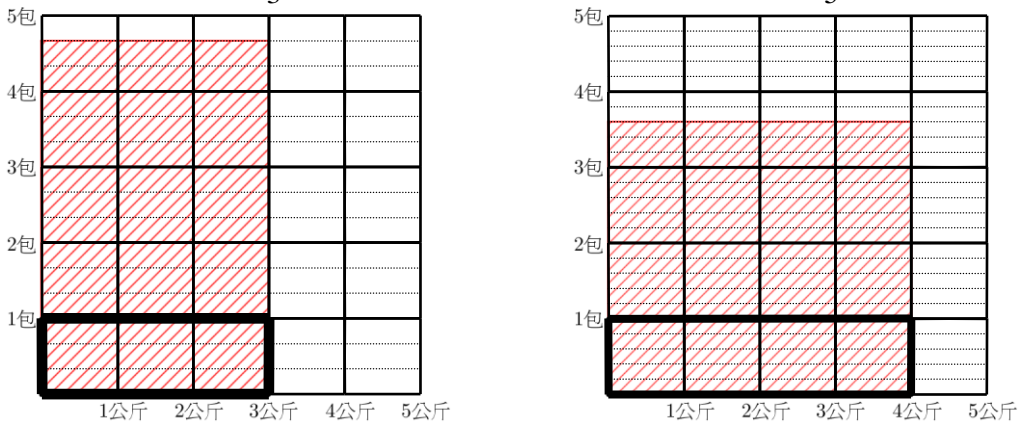


圖 十

課業三：分數乘以分數

當學生們建立了分數倍的概念後，我們就可以處理「分數乘以分數」這個一般情況，並和學生一起推導出「分子乘分子、分母乘分母」的分數乘法公式。以「1包米重 $\frac{4}{5}$ 公斤， $\frac{2}{3}$ 包米重多少公斤？」為例，和之前一樣，學生先在圖中以斜綫畫出重量所佔的範圍（圖十一），然後老師向學生作出下列提問：

「從圖中所見，斜綫部份包含了多少等份？」（8 等份）

「為甚麼？」（因為每公斤的米分成了5份，佔4份；而每包米分成了3份，佔2份，所以斜綫部份包含了 $4 \times 2 = 8$ 等份）

「那麼，斜綫部份所表示的重量是否8公斤？為甚麼？」（不是，因為每等份的重量不是1公斤）

「每1格分為多少等份？」（ $5 \times 3 = 15$ 等份）

「如何計算斜綫部份所表示的重量？」（ $\frac{4 \times 2}{5 \times 3}$ 公斤）

透過以上提問，加上圖像的配合，學生就能明白為何要以「分子乘分子、分母乘分母」的方法計算兩個真分數相乘了（圖十一）。同樣地，對於被乘數或乘數出現帶分數的情況，我們只需要先把帶分數化作假分數，再以同樣的方法作計算就可得出答案（圖十二、圖十三）。

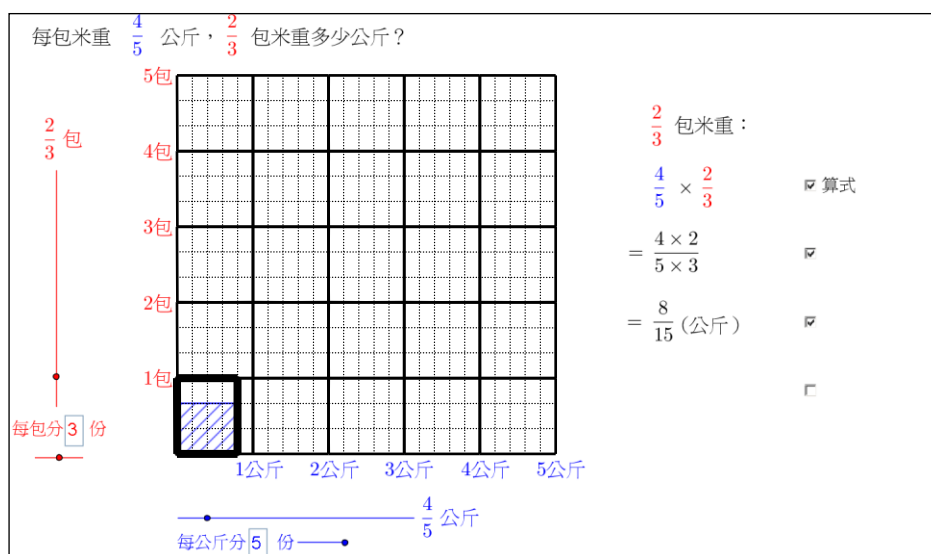


圖 十 一

每包米重 $1\frac{2}{3}$ 公斤， $\frac{4}{5}$ 包米重多少公斤？

$\frac{4}{5}$ 包米重：

$$1\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$
 算式

$$= \frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{5 \times 4}{3 \times 5}$$

$$= 1\frac{1}{3} \text{ (公斤)}$$

假分數

圖 十 二

每包米重 $2\frac{1}{4}$ 公斤， $3\frac{1}{3}$ 包米重多少公斤？

$3\frac{1}{3}$ 包米重：

$$2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{3}$$
 算式

$$= \frac{9}{4} \times \frac{10}{3}$$

$$= \frac{9 \times 10}{4 \times 3}$$

$$= 7\frac{1}{2} \text{ (公斤)}$$

假分數

圖 十 三

結語

分數乘法其實不是一個難處理的課題，最重要的關鍵在於幫助學生將對倍數的理解由整數擴展至分數，然後才是引入乘法公式。能夠做到這點，除了幫助學生解分數乘法的應用題外，更可幫助他們理解隨後的分數除法中「顛倒相乘」的公式（見下文），亦為他們將來在中學學習百分數及率和比等課題打好基礎。

作者電郵：anthonyor@edb.gov.hk