**教學建議：分數除法（小學五年級）**

**整體發展**

* 本單元設想小學五年級學生已經在分數的學習方面已經有差不多兩年了，對分數的理解亦已漸次掌握，尤其是通過分數的運算（加法、減法、乘法）及其在一些不同處境中的運用，學生應該對一些關於分數的基本概念有一定學習經驗和認識，例如：
* 分數可以表述一個整體的部分；
* 若要以分數表述一個整體的部分，該整體可先行分（分割）成若干等分；
* 以分數表述一個整體的部分，要明確掌握整體的意思（詳見下）。
* 這個單元由分物的處境開始引導學生先重新考慮基本的除法，期望學生的理解可以由整數的量漸次過渡去處理分數的量，過程中每每連繫於具體的生活處境，讓學生較易掌握數量和它們的運算所具有的實際意義。
* 既然學生應該對牽涉整數的處境較為熟悉，我們就是希望學生可以藉此作為理解的基礎，從而理解牽涉分數的類似處境。一般都可以通過一對（或一組）有著相同處境，只是數量上有著整數和分數的分别，讓學生作出類比，分數的數量對應整數的數量，分數之間的某種運算對應整數之間的相同運算，這樣可以較容易明白為甚麼分數又或分數的除法可以解決一些問題。
* 由整數過渡到分數的考慮或會有些困難，先用二分之一（一半）這個日常生活較自然、也較易理解的分數，或會較容易引導學生進行這個思考的過渡和概念的延伸。
* 有時剛好相反。為了過渡到牽涉分數的情境，有時會將一個只牽涉整數的情境解釋得頗為複雜，顯得有點牽強。老師需要知道學生本可以用低年級的方法就可很簡單地處理過去。如此老師便須注意學生或會感到困惑，可以先讓學生知道另一個解釋方法是有助繼續發展，著眼點不是得出一個答案，而是方法；又或可以用一些不太簡單的整數作為例子。
* 具體事物連繫到分數的表述，我們也常常借助圖像的表示。值得注意的是，很多時候小學生初學分數時都會以一個圓及將其分成若干扇形來表達分數，但到此階段也可讓學生了解一個長方形及其分割也是一個方便的表示，而且也是一個較圓和扇形分割更容易的方法。
* 有關分數的其中一個核心概念是「1」的意思，即哪個是整體或全部而被看成為「1」，隨之而將其部分以分數表述。在分數除法的問題裡，尤其是連繫於生活情境的應用問題，每每就是要讓學生在解題的過程中，看著一個分數時，清楚知道它所表述的是哪一個整體的部分。老師在教學和講解時，就是在適當的時候，通過圖像、清晰的描述、單位的確定、明確的提問等，引導學生注意到哪個是整體（例如一個薄餅、一盒蛋糕、一包朱古力），其中部分又是甚麼（例如一個薄餅的幾分之幾、一盒蛋糕的若干件、一包朱古力的若干粒）。
* 一個分數固然可以直接表示一個整體的一部分，例如$ \frac{3}{5} $，一般的想法固然就是整體的五分之三，但是其實也可以看成是三個五分之一。兩者所指示的是相同的東西，但後者卻有助理解一個基本的概念：不同的東西都可設想成一個完整的整體或單位，例如，「五分之一」都可以是一個完整的單位，我們可以有三個「五分之一」。其實有些課本也通過這個「單位分數」的概念去幫助學生學習分數及其運算；而英語的表述（如one-fifth, three-fifths）也較接近這個想法。
* 有些教科書引入「倒數」的概念，並強調一個數除以一個分數就是那個數乘該分數的倒數。這裡我們沒有以「倒數」來表述分數除法的原理。我們或可以這樣看目前這個階段的學習，「倒數」雖然有助表述分數除法的算理，說起來較「顛倒分子分母再相乘」更為方便，但學生最需要明白的不是為甚麽可以將除法「變成」乘一個倒數，而是為甚麼和怎樣可以用除法去解決某些問題。
* 這個項目所提供教學和評估的材料，並不足以涵蓋不同學生在學習這個課程單元的所需，也無意取代其他完整的教科書或教材套設計。老師使用時還須配合學生的需要或其他慣用的教材、教科書或教具。而且，老師亦可按教學需要而修訂或增刪這裡提供的某些例子或問題。

**除法和分數的關係**

* + **「1. 除法和分數的關係 簡報」**通過一些熟悉的生活情境，讓學生再度思考除法（尤其是均分除）及其結果的意思。主要的想法是，通過具體事物（例如若干個蛋糕）的均分，而該事物即使分開也是容易理解的份量（如五分之一個蛋糕），讓學生理解均分除之後的結果不再局限於整數商、又或整數商帶著一個整數餘數，而可以是一個分數，兼且該分數結果在特定的情境中是有明確意義的事物。
	+ 學生於五年級下學期之前所學的除法為帶餘除法，因此對於一般學生而言，$5÷2=2….1$（2餘1），而不是等於$ \frac{5}{2} $。**「1. 除法和分數的關係 簡報」**借用均分蛋糕的情境，讓學生認識不帶餘除法，並透過一些例子，得出$a÷b=\frac{a}{b}$ 的結論。當然，老師並不一定需要用抽象的代數*a*, *b*來表達這個關係。
	+ 另外，這部分的學習也同時引出一個概念上的更新：在除法中，不一定是被除數比除數大，也可以反過來是被除數少於除數。老師亦可強調這一點。

**除法和分數乘法的關係**

* + **「2. 除法和分數乘法的關係 簡報」**主要希望讓學生明白到$x÷n=x×\frac{1}{n}$的道理。承接之前介紹除法時考慮的情境，此簡報繼續以均分蛋糕作為例子，即把*x*個蛋糕均分給*n*人，要計算每人得到多少個蛋糕時，希望讓學生明白這個計算除了可以用$x÷n$來處理外，還可以看成是先將每個蛋糕都分成*n*份，然後每人就可分得每個蛋糕的$ \frac{1 }{n}$ 個，即$x×\frac{1}{n }$ 個。
	+ 當然，老師並不一定須要用抽象的代數*a*, *b*來表達這個關係。正如以上提及，我們亦沒有必要引入「倒數」的概念。
	+ 重要的是，這部分的發展是期望將簡單的除法概念連繋到分數乘法的概念。這個亦是為甚麼除法（尤其在這裡引入了分數之後的除法）可以跟乘法扯上關係的一個關鍵。
	+ 正是由於這個單元都在處理分數，這部分的學習也同時包括了被除數是分數的情境（例如：四分一個蛋糕要分給兩個人）。重點是：相類的情境，即使是直觀上可能有點不自然的數量作為被除數，但用同樣的分割和計算方法（對除數的處理），就可以找到結果。
	+ 正如以上提過，學生對這裡所用的分數都應該清楚知道它們各自所表述的是哪一個整體的部分。以簡報中所提供的例子來說，一個蛋糕就是一個整體，分割和計算過程以至結果中出現的分數，都是指一個蛋糕的幾分之幾。
	+ **「分數除法(1) 工作紙」**的設計就是提供一些情境讓學生嘗試進行這種分割和計算方法，從而得出結果。

**除法和分數乘法的關係：包含除的情境**

* + 前一部分引出除法概念連繋到分數乘法的概念的重點，過程中以均分除作為現實情境的一個核心概念，這個安排是假設那些牽涉均分除的情境較易理解。由此我們進而考慮另一類的情境，引導學生如何以包含除為核心概念去解決一些不太直觀的問題。
	+ 以計算分數除法（甚或公式）而言，這部分似乎是重複著前一部分的結果。但是，這部分的困難不是計算的問題，也不單單是那個「除法變乘法」的結果。而是：為甚麼是除法的問題？更重要的是，為甚麼是這個除以那個？所以，教學的重點就是幫助學生了解如何在牽涉簡單整數的情境所應用的除法（包含除）可以同樣地應用於其他相類似的情境，並應用前部分所學計算分數的技巧，就能解決問題。
	+ **「分數除法(2) (朱古力) 簡報」**和**「分數除法(2) (薄餅) 簡報」**的內容相若，主要分別在於前者運用學生熟悉的朱古力包裝來討論每3粒裝成1條的包含除法，而後者則用2個薄餅裝成1盒的情境來討論。朱古力例子的好處為學生熟悉此種朱古力一般是以3粒裝成1條，學生毋須刻意處理和強行記著甚麼是一個整體（三粒一條已經是熟悉的一個整體）。而運用2個薄餅為1盒的好處則是，以2作為除數會更容易理解。此部分的簡報有兩個主要目的：
1. 讓學生於包含情境中理解5個物件，每2個一組，為甚麼是以$5÷2$來計算，以及為甚麼結果是 $\frac{5}{2}$（或$2\frac{1}{2}$）組。
2. 即使被除數是分數時，還是可以繼續運用類似的包含除來解釋和計算。（這個時候就會出現一道分數除以一個整數的算式。）
	* 正如以上提過，學生對這裡所用的分數都應該清楚知道它們各自所表述的是哪一個整體的部分。這𥚃考慮的情境就較前一部分（均分除的情境）困難一點，學生或需要更多引導或明確的表述。以簡報中所提供的例子來說，除法計算之後的結果（整數、分數）如是，都是以「條」（朱古力例子）或「盒」（薄餅例子）作單位，亦即以一條或一盒作一個整體，分數結果就是幾分之幾條或幾分之幾盒。然而，問題提出的幾分之幾粒（朱古力）或幾分之幾個（薄餅），便須要讓學生特別留意和理解了。

**分數除法：一般情況**

* + **「分數除法(3) 簡報」**前面的部分是承接**「分數除法(2) 簡報」**，先讓學生明白為甚麼3個薄餅，每 $\frac{1}{2}$個裝成1碟，可以以$3÷\frac{1}{2}$ 來計算最終得到多少碟，另外，這簡報亦能讓學生觀察到，1個薄餅裝成2碟，所以2個薄餅裝成$2×2$碟，3個薄餅裝成$3×2$碟，如此類推。最終希望學生明白$x÷\frac{1}{n}=x×n$。這裏最困難的部分是如何讓學生明白到為甚麼$2÷\frac{2}{3}=2×\frac{3}{2}$。當然，主要思考的部分是：當$\frac{2}{3}$個薄餅等於1碟，即$\frac{1}{3}$個薄餅等於$\frac{1}{2}$碟，反過來說，1個薄餅其實等於3個$\frac{1}{2}$碟，即 $\frac{3}{2}$碟，因此2個薄餅便是$2×\frac{3}{2}$，如此類推。經過這例子後，希望學生能明白並接受一個量除以 $\frac{2}{3}$的結果，其實就等於該量乘以 $\frac{3}{2}$。最後這簡報以$\frac{1}{2}÷\frac{2}{3}$ 的例子作結，並帶出$x÷\frac{a}{b}=x×\frac{b}{a}$的結論。
	+ 除此之外，**「分數除法(3) 其他方法 簡報」**中亦展示了另一種處理分數除法的方法，這方法是讓學生看到，其實 $6÷2$ 和 $\frac{6}{15}÷\frac{2}{15}$ 的結果是相同的。簡報中分別運用了「6粒朱古力」和「$\frac{6}{15}$ 塊朱古力」來描述相同份量的朱古力，前者以1粒朱古力作為一個單位，後者則以$\frac{1}{15}$塊朱古力作為一個單位，而$\frac{6}{15}$ 就是6個$\frac{1}{15}$ ，借用了「單位分數」的概念。$\frac{6}{15}÷\frac{2}{15}$ 這數式也就可以理解為「以2個$\frac{1}{15}$為1組，6個$\frac{1}{15}$ 包含了多少組？」的意思，與「以2個人為1組，6個人包含了多少組？」的意思完全一樣，兩者都是簡單的除法問題， 同樣以$6÷2$去計算。在應用上，以$ \frac{3}{4}÷\frac{1}{2} $為例，只要把除數和被除數進行「通分母」，我們便可得到$ \frac{3}{4}÷\frac{1}{2}=\frac{3}{4}÷\frac{2}{4}=3÷2=1\frac{1}{2}$，從中簡化了分數除法的步驟。有些課本其實也是利用這個方法來處理分數除法。